UNIVERSITEIT VAN JOHANNESBURG

Toegepaste Wiskunde 3B

Taak #3 **7:30, 04 Augustus 2009**

---

1. Beskou die Hilbertruimte $\mathbb{C}^3$. Wys dat die matriks

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

'n waarneembare kwantiteit beskryf. Beskryf die uitkomstes en geassosieerde waarskynlikhede vir die meting van 'n stelsel beskryf deur die toestand

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wat is die toestand na die meting?

2. Beskou die Hilbertruimte $\mathbb{C}^2$ en die waarneembaar beskryf deur die matriks

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Beskryf die uitkomstes en geassosieerde waarskynlikhede vir die meting van 'n stelsel beskryf deur die toestand

$$\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Wat is die toestand na die meting?

Beskryf die uitkomstes en geassosieerde waarskynlikhede vir die meting van 'n stelsel beskryf deur die toestand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\theta} \end{pmatrix}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Wat is die toestand na die meting?

3. Laat A en B twee regruilbare $n \times n$ Hermitiese matrikse oor $\mathbb{C}$ wees, elkeen met verskillende eiewaardes. Dus is die ooreenstemmende eieruimtes een-dimensioneel. Wys dat elke eievektor $\mathbf{x}$ van A ook 'n eievektor van B is.

Wenk: Wys eers dat $B\mathbf{x}$ of $\mathbf{0}$ of 'n eievektor van A is.

Applied Mathematics 3B

Assignment #3 **7:30, 04 August 2009**

---

1. Consider the Hilbert space $\mathbb{C}^3$. Show that the matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

describes an observable. Describe the measurement outcomes and associated probabilities when observing (performing the measurement on) a system described by the state

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

What is the state after the measurement?

2. Consider the Hilbert space $\mathbb{C}^2$ and the observable described by the matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Describe the measurement outcomes and associated probabilities when observing a system described by the state

$$\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

What is the state after the measurement?

Describe the measurement outcomes and associated probabilities when observing a system described by the state

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\theta} \end{pmatrix}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

What is the state after the measurement?

3. Let A and B be two commuting $n \times n$ Hermitian matrices over $\mathbb{C}$ each with distinct eigenvalues. Thus the corresponding eigenspaces are one-dimensional. Show that every eigenvector $\mathbf{x}$ of A is also an eigenvector of B.

Hint: First show that $B\mathbf{x}$ is either $\mathbf{0}$ or an eigenvector of A.